CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100-2105 (wersje arkusza: A i B), EMAP-P0-200-2105, EMAP-P0-300-2105, EMAP-P0-400-2105, EMAP-P0-600-2105, EMAP-P0-700-2105, EMAP-P0-Q00-2105
Termin egzaminu:	5 maja 2021 r.
Data publikacji dokumentu:	21 czerwca 2021 r.

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: C

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.7) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: B

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu […] i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: C
Wersja B: A

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: D
Wersja B: B

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: C

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: D

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: C

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: D
Wersja B: A

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$; 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: C

Zadanie 11. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: C
Wersja B: B

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: D

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: D
Wersja B: B

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: D
Wersja B: A

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: D

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: A

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: C
Wersja B: B

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: D
Wersja B: D

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: C

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: B

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: D
Wersja B: B

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: C

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: B

Zadanie 24. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G10.6) oblicza pole koła […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: C
Wersja B: D

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: D

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: A
Wersja B: B

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: B
Wersja B: C

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G9.3) wyznacza […] medianę zestawu danych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
Wersja A: C
Wersja B: B

ZADANIA OTWARTE

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.

3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 29. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

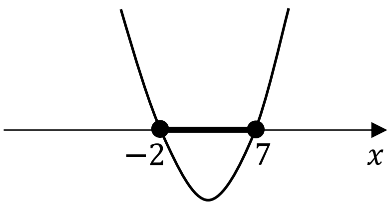
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2-5x-14$.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej $x^2-5x-14\le 0$.

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:
- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2-5x-14$: $x_1=-2$ oraz $x_2=7$

ALBO
- odczyta z wykresu funkcji $f(x)=x^2-5x-14$ i zapisze miejsca zerowe $x_1=-2$ oraz $x_2=7$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy spełni warunki określone w zasadach oceniania za 1 pkt oraz:
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -2,7\rangle$ lub $x\in\langle -2,7\rangle$

ALBO
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi:

1. Jeżeli zdający, realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, rozpoczynając realizację pierwszego etapu rozwiązania, rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy i obliczy/poda pierwiastki tego rozpatrywanego trójmianu, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Akceptujemy zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\langle 7, -2 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pierwszy etap rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci $x^2 - 5x - 14 \leq 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x - 14$.

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta = 81$ i stąd $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 7$.

ALBO

Stosujemy wzory Viète'a:

$x_1 \cdot x_2 = -14$ oraz $x_1 + x_2 = 5$, stąd $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 7$.

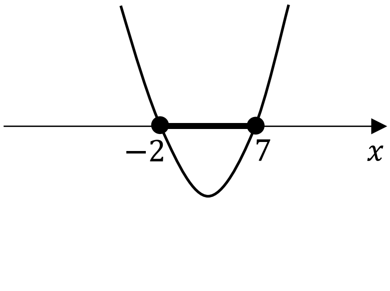
ALBO

Podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu lub zaznaczając je na wykresie:

$x_1 = -2$ oraz $x_2 = 7$.

Drugi etap rozwiązania

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -2, 7 \rangle$ lub $x \in \langle -2, 7 \rangle$ lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej



Zadanie 30. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G6.4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne; G6.5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przypadkach, mnoży sumy algebraiczne.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- przekształci nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ do postaci równoważnej, z której można przeprowadzić bezpośrednie wnioskowanie o prawdziwości tezy,
  np. 1) $\frac{c(a-b)}{b(b+c)} < 0$ lub 2) $c(a-b) < 0$ lub 3) $ca < cb$ lub 4) $\frac{a-b}{b} < \frac{a-b}{b+c}$

ALBO

- przekształci nierówność $a < b$ do postaci równoważnej $a(b+c) < b(a+c)$

ALBO

- przeprowadzając dowód nie wprost, przekształci nierówność $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$ (która jest zaprzeczeniem tezy) do postaci $ac \geq bc$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie – zdający musi spełnić warunki określone w zasadach oceniania za 1 punkt oraz:

- wykorzystać założenie $a < b$ w sytuacjach 1), 2), 3) określonych w pierwszym punktorze zasad oceniania za 1 punkt

ALBO

- wykorzystać założenie $a < b$ i porównać ułamki w sytuacji określonej jako 4) w pierwszym punktorze zasad oceniania za 1 punkt

ALBO

- przeprowadzając dowód wprost, doprowadzić nierówność $a < b$ do tezy

ALBO

- przeprowadzając dowód nie wprost, doprowadzić nierówność $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$ do postaci $a \geq b$ i stwierdzić sprzeczność z założeniem $a < b$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze błędne założenia, z których korzysta (np. gdy dzieli nierówność obustronnie przez c, przy zapisie $c \geq 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla wybranych wartości a, b, c, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Z założenia wiadomo, że a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi i $a < b$.
Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$:

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} < 0$$

$$\frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)} < 0$$

$$\frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)} < 0$$

$$\frac{ab + ac - ab - bc}{b(b+c)} < 0$$

$$\frac{ac - bc}{b(b+c)} < 0$$

$$\frac{c(a-b)}{b(b+c)} < 0$$

Z założenia liczby b i c są dodatnie, więc $b(b+c) > 0$.
Z założenia c jest dodatnia i $a - b < 0$, więc $c(a-b) < 0$.
Zatem $\frac{c(a-b)}{b(b+c)}$ jest liczbą ujemną (jako iloraz liczby ujemnej i dodatniej), czyli nierówność $\frac{c(a-b)}{b(b+c)} < 0$ jest prawdziwa. To należało wykazać.

Sposób 2.
Z założenia wiadomo, że a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi i $a < b$.
Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$:

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} < 0 \quad /\cdot b(b+c)$$

(zwrot nierówności nie zmieni się, gdyż $b \cdot (b+c) > 0$)

$$a(b+c) - b(a+c) < 0$$

$$ab + ac - ab - bc < 0$$

$$c(a-b) < 0$$

Z założenia $c > 0$ oraz $a - b < 0$, więc $c(a-b) < 0$.
Zatem nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ jest prawdziwa. To należało wykazać.

Sposób 3.
Z założenia wiadomo, że a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi i $a < b$.
Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad /\cdot b(b+c)$$

(zwrot nierówności nie zmieni się, gdyż $b \cdot (b+c) > 0$)

$$a(b+c) < b(a+c)$$

$$ab + ac < ab + bc$$

$$ac < bc$$

Z założenia $c > 0$, więc otrzymujemy $a < b$, co jest prawdą.
Zatem nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ jest prawdziwa. To należało wykazać.

Sposób 4.
Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$:

$$\frac{a}{b} - 1 < \frac{a+c}{b+c} - 1$$

$$\frac{a-b}{b} < \frac{a+c-b-c}{b+c}$$

$$\frac{a-b}{b} < \frac{a-b}{b+c}$$

Z założenia a i b są liczbami dodatnimi oraz $a < b$, więc liczniki ułamków $\frac{a-b}{b}$ oraz $\frac{a-b}{b+c}$ są równe i ujemne. Ponadto ich mianowniki są dodatnie i mianownik ułamka $\frac{a-b}{b+c}$ jest większy od mianownika ułamka $\frac{a-b}{b}$, więc $\frac{a-b}{b+c} < \frac{a-b}{b}$. To oznacza, że nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ jest prawdziwa.

Sposób 5.
Z założenia wiadomo, że a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz spełniona jest nierówność

$$a < b$$

Tę nierówność przekształcamy równoważnie, otrzymując kolejno następujące nierówności:

$$ac < bc$$

$$ab + ac < ab + bc$$

$$a(b+c) < b(a+c)$$

Dzielimy tę nierówność stronami przez liczbę dodatnią $b(b+c)$ i otrzymujemy

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

To należało wykazać.

Sposób 6. (dowód nie wprost)

Z założenia wiadomo, że a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz $a < b$.

Załóżmy, nie wprost, że $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c}$:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+c} \ /\cdot b(b+c)$$

Ponieważ $b(b+c) > 0$, więc otrzymujemy dalej

$$a(b+c) \geq b(a+c)$$

$$ab + ac \geq ab + bc$$

$$ac \geq bc$$

$$a \geq b$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $a < b$. To kończy dowód.

Zadanie 31. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- skorzysta z własności funkcji liniowej i zapisze wartość wyrazu wolnego funkcji f, np. $b = 2$ lub $f(x) = ax + 2$

ALBO

- zapisze równanie ze współczynnikami funkcji $f(x) = ax + b$, wynikające z treści zadania, np. $2 = a \cdot 0 + b$ lub $a \cdot 4 + b - (a \cdot 2 + b) = 6$

ALBO

- poprawnie obliczy współczynnik kierunkowy a funkcji f (np. poprzez zastosowanie ilorazu różnicowego): $a = 3$

ALBO

- nie przedstawi toku rozumowania ani obliczeń i zapisze wzór funkcji $f(x) = 3x + 2$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zastosuje poprawną metodę wyznaczenia współczynnika a, uzyska poprawne wartości współczynników a i b oraz zapisze wzór funkcji $f(x) = 3x + 2$.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>
Z warunku $f(0) = 2$ wnioskujemy, że współczynnik b we wzorze funkcji $f(x) = ax + b$ jest równy 2.
Obliczamy współczynnik kierunkowy a :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$a = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Zapisujemy wzór funkcji $f(x) = 3x + 2$.

<u>Sposób 2.</u>
Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, czyli $f(0) = 2$, więc $b = 2$.
Z treści zadania wiemy, że $f(4) - f(2) = 6$. Stąd

$$4a+b-(2a+b)=6$$
$$2a=6$$
$$a=3$$

Zatem $f(x)=3x+2$.

Zadanie 32. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy poprawnie przekształci równanie $\frac{3x+2}{3x-2}=4-x$ do równania kwadratowego, np.:
$$3x+2=(3x-2)(4-x)$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania równania wymiernego (np. stosuje przekształcenia równoważne) i uzyska poprawne rozwiązania: $x=\frac{5}{3}$ lub $x=\frac{12}{6}=2$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie zapisze zastrzeżenia $x\neq\frac{2}{3}$, to może otrzymać **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania i konsekwentnie je rozwiąże do końca, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, przekształcając równanie wymierne do równania kwadratowego, zastosuje błędną metodę i zapisze np. $(3x+2)(3x-2)=(4-x)(3x-2)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający odgadnie jedno z rozwiązań równania, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli odgadnie dwa rozwiązania równania i nie uzasadni, że są to jedyne rozwiązania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz traktuje równanie jako nierówność (rysuje parabolę i podaje przedziały jako rozwiązanie), to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie. Podobnie, jeżeli zdający poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego, uzyska poprawne wartości pierwiastków, lecz poda odpowiedź w postaci przedziału/sumy przedziałów o końcach $\frac{5}{3}$ i 2, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie ma sens liczbowy dla $x \neq \frac{2}{3}$.
Przekształcamy równanie:

$$\frac{3x+2}{3x-2} = 4 - x$$

$$3x + 2 = (3x-2)(4-x)$$

$$3x + 2 = 12x - 3x^2 - 8 + 2x$$

$$3x^2 - 11x + 10 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.
Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3x^2 - 11x + 10$: $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 1$ i stąd $x_1 = \frac{5}{3}$ oraz $x_2 = \frac{12}{6} = 2$.
Otrzymane pierwiastki są różne od liczby $\frac{2}{3}$, więc są rozwiązaniami danego równania.

Zadanie 33. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zastosuje poprawną metodę obliczenia pola trójkąta AKL, zapisując stosunek pól trójkątów ABC i AKL jako kwadrat stosunku długości boków, i prawidłowo obliczy pole trójkąta AKL: $P_{\Delta AKL} = 4\sqrt{3}$

ALBO

- zastosuje poprawną metodę obliczenia długości boku trójkąta ABC (stosuje wzór na pole trójkąta równobocznego) i prawidłowo obliczy długość boku trójkąta ABC: 6

ALBO

- zapisze równanie, w którym niewiadomą jest długość boku trójkąta AKL, np. $\frac{(1{,}5 \cdot |AK|)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

ALBO

- uzależni długości boków trójkątów ABC i AKL od tej samej zmiennej, np. $|AK| = 2x$, $|AB| = 3x$ i zapisze równanie postaci $\frac{(3x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zastosuje poprawną metodę wyznaczenia długości boku trójkąta AKL i uzyska poprawny wynik: $|AK| = 4$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje skalę podobieństwa, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze, że stosunek długości boków trójkątów ABC i AKL jest równy $\frac{3}{2}$, popełni błąd w wyznaczeniu długości boku trójkąta ABC i konsekwentnie do tego obliczy długość boku trójkąta AKL, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych i warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta AKL}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

więc

$$\frac{9\sqrt{3}}{P_{\Delta AKL}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$P_{\Delta AKL} = 9\sqrt{3} : \left(\frac{9}{4}\right) = 9\sqrt{3} \cdot \frac{4}{9} = 4\sqrt{3}$$

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego i obliczamy długość b boku trójkąta AKL:

$$P_{\Delta AKL} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$b = 4$$

Długość boku trójkąta AKL jest równa 4.

Sposób 2.
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
a – długość boku trójkąta równobocznego ABC,
b – długość boku trójkąta równobocznego AKL.

Obliczamy długość boku trójkąta ABC:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$a = 6$$

Stosunek długości boków trójkątów ABC i AKL jest równy $\frac{3}{2}$, więc

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{b} = \frac{3}{2}$$

czyli $b = 4$.
Długość boku trójkąta AKL jest równa 4.

Sposób 3.
Niech x oznacza długość boku trójkąta AKL. Ponieważ stosunek długości boku trójkąta ABC do długości boku trójkąta AKL jest równy $\frac{3}{2}$, więc długość boku trójkąta ABC jest równa $\frac{3}{2}x$.
Pole trójkąta ABC jest równe $9\sqrt{3}$, więc ze wzoru na pole trójkąta równobocznego otrzymujemy równanie

$$\frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Stąd

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 36$$

$$\frac{3}{2}x = 6$$

$$x = 4$$

Długość boku trójkąta AKL jest równa 4.

Zadanie 34. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:
- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne lub obliczy/poda ich liczbę: $|\Omega| = 36$

ALBO
- przedstawi poprawny sposób wyznaczenia wszystkich elementów zbioru A lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:
$$(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)$$

ALBO
- obliczy lub poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 12$

ALBO
- sporządzi drzewo stochastyczne składające się z 36 gałęzi i zapisze na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów prawdopodobieństwo $\frac{1}{6}$ lub wskaże wszystkie istotne gałęzie na tym drzewie

ALBO
- sporządzi fragment drzewa doświadczenia składający się jedynie z 12 istotnych gałęzi

ALBO
- zapisze tylko $P(A) = \frac{12}{36}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy spełni warunki określone w zasadach oceniania za 1 punkt oraz zastosuje poprawną metodę obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyska poprawny wynik: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 12 lub 36 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający sporządzi jedynie pustą tabelę o 36 pustych polach, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozpatruje inne niż podane w treści zadania doświadczenie losowe, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.(*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (a,b), gdzie $a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)$,

więc $|A| = 12$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Sposób 2.
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (a,b), gdzie $a, b \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

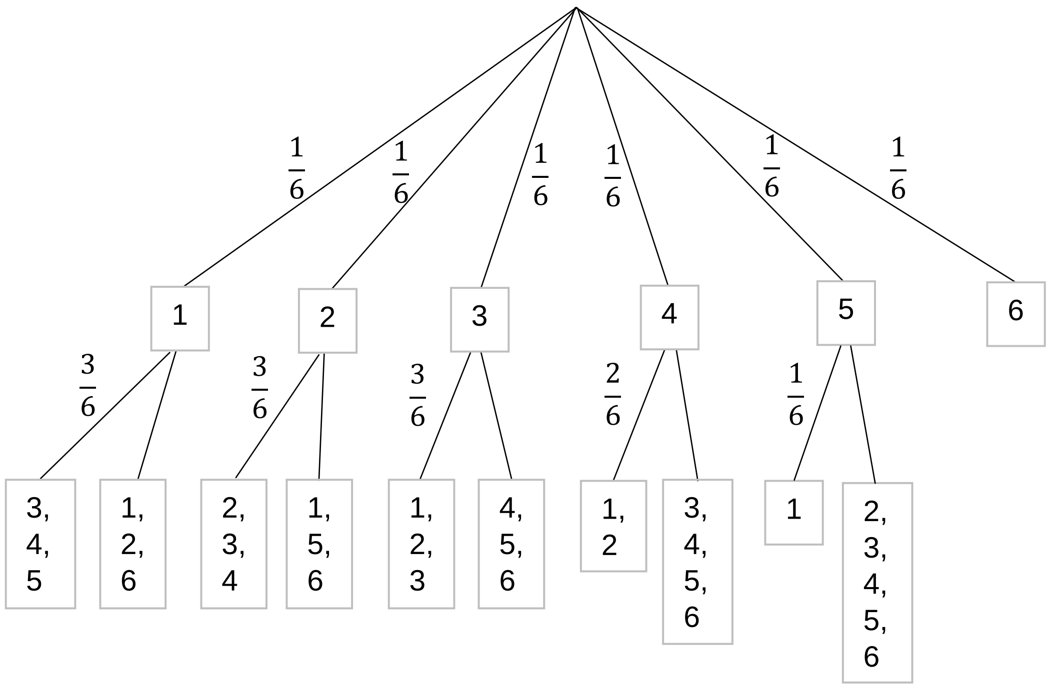
I losowanie

II losowanie	1	2	3	4	5	6
1			×	×	×	
2		×	×	×		
3	×	×	×			
4	×	×				
5	×					
6						

Symbolem × oznaczono zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.
Wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu jest 36.
Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest 12.
Stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

<u>Sposób 3.</u> (*drzewo stochastyczne*)

Rysujemy drzewo stochastyczne rozważanego doświadczenia.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

Zadanie 35. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- spełni jeden z poniższych warunków:

  1) obliczy współczynnik kierunkowy równania prostej AB: $a_{AB} = -\frac{1}{3}$ lub zapisze równanie prostej AB w postaci ogólnej $x + 3y - 16 = 0$

  2) obliczy współrzędne środka M odcinka AB: $M = \left(-\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right)$

  3) przyjmie pierwszą współrzędną punktu C równą zeru i zapisze np. $C = (0, y_C)$

  4) zapisze równość $|AC| = |BC|$ w zależności od współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$, np.:

$$\sqrt{\left(x_C - (-20)\right)^2 + (y_C - 12)^2} = \sqrt{(x_C - 7)^2 + (y_C - 3)^2}$$

ALBO

- zastosuje poprawną metodę obliczenia długości boku AB trójkąta i uzyska poprawny wynik: $|AB| = 9\sqrt{10}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- spełni jeden z warunków 1)–4) określonych w punktorze pierwszym zasad oceniania za 1 punkt oraz obliczy długość boku AB trójkąta

ALBO

- spełni jeden z poniższych warunków:

  1) zapisze równanie symetralnej k odcinka AB: $y - \frac{15}{2} = 3(x + \frac{13}{2})$ lub $y = 3x + 27$

  2) zapisze równanie, w którym niewiadomą jest druga współrzędna wierzchołka C, wynikające z prostopadłości odpowiednich wektorów, np. $\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{MC}$:

$$-\frac{27}{2}\cdot\frac{13}{2}+\frac{9}{2}\cdot\left(y_C-\frac{15}{2}\right)=0$$

3) zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\sqrt{\left(x_C-(-20)\right)^2+(y_C-12)^2}=\sqrt{(x_C-7)^2+(y_C-3)^2} \text{ i } x_C=0$$

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy:

- spełni jeden z warunków 1)–3) określonych w punktorze drugim zasad oceniania za 2 punkty oraz obliczy długość boku AB trójkąta

ALBO

- zastosuje poprawną metodę obliczenia drugiej współrzędnej punktu C i obliczy współrzędne punktu: $C=(0,27)$

Zdający otrzymuje .... 4 p.

gdy zastosuje poprawną metodę obliczenia drugiej współrzędnej punktu C oraz poprawną metodę obliczenia jednego z boków trójkąta ABC i uzyska poprawne wyniki: $C=(0,27)$ oraz $|AB|=9\sqrt{10}$ (lub $|BC|=25$).

Zdający otrzymuje .... 5 p.

gdy zastosuje poprawną metodę wyznaczenia współrzędnych punktu C oraz obliczy obwód L trójkąta ABC i uzyska poprawne wyniki: $L=9\sqrt{10}+50$, $C=(0,27)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa punkt C leżący na osi Oy i w rozwiązaniu popełnia tylko błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający przyjmie błędnie, że wierzchołek C leży poza osią Oy i korzysta z tego w rozwiązaniu, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
3. Rozwiązania odczytywane.

   a) Jeżeli zdający wyznacza współrzędne punktu C, wykorzystując punkty kratowe: zaznaczy w układzie współrzędnych poprawnie punkty A i B, narysuje trójkąt równoramienny ABC, a punkt $(0,27)$ oznaczy przez C, to za wyznaczenie współrzędnych punktu C może uzyskać **3 punkty**.

   b) Jeżeli zdający rysuje w układzie współrzędnych symetralną odcinka AB i odczytuje współrzędne punktu C i zapisuje $C=(0,27)$ oraz sprawdzi rachunkowo, że $|AC|=|BC|$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty** (jeżeli tego sprawdzenia nie wykona, to otrzymuje za tę część rozwiązania **2 punkty**, a gdy odczyta błędne współrzędne punktu C, to otrzymuje **0 punktów**).
4. Jeżeli zdający rozważa dwa różne położenia punktu C i nie odrzuca niewłaściwego rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
5. Jeżeli zdający nie sporządzi rysunku i zapisze tylko $C=(0,27)$, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli zdający nie sporządzi rysunku, lecz zapisze $C=(0,27)$ i dalej kontynuuje rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

6. Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB} = \frac{3-12}{7-(-20)} = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$$

Zatem współczynnik kierunkowy symetralnej k odcinka AB jest równy

$$a_k = 3$$

Symetralna k przechodzi przez środek M odcinka AB. Obliczamy współrzędne punktu M:

$$M = \left(\frac{-20+7}{2}, \frac{12+3}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

Zatem prosta k ma równanie postaci

$$y - \frac{15}{2} = 3\left(x - \left(-\frac{13}{2}\right)\right)$$

$$y - \frac{15}{2} = 3x + \frac{39}{2}$$

$$y = 3x + 27$$

Ponieważ punkt C leży na osi Oy i na prostej k, więc współrzędne punktu C są równe $C = (0, 27)$.
Obliczamy długości boków trójkąta:

$$|AC| = \sqrt{\left(0-(-20)\right)^2 + (27-12)^2} = \sqrt{400+225} = \sqrt{625} = 25$$

$$|AB| = \sqrt{\left(7-(-20)\right)^2 + (3-12)^2} = \sqrt{729+81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Obliczamy obwód L trójkąta ABC:

$$L = |AB| + |BC| + |CA| = 9\sqrt{10} + 25 + 25 = 50 + 9\sqrt{10}$$

Sposób 2.
Ponieważ wierzchołek C trójkąta równoramiennego ABC leży na osi Oy, więc jego współrzędne są równe $C = (0, y_C)$.

Ponieważ $|AC| = |BC|$, więc $|AC|^2 = |BC|^2$. Stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie

$$\left(0-(-20)\right)^2 + (y_C - 12)^2 = (0-7)^2 + (y_C - 3)^2$$

$$400 + y_C^2 - 24y_C + 144 = 49 + y_C^2 - 6y_C + 9$$

$$-18y_C = -486$$

$$y_C = 27$$

Zatem $C = (0, 27)$.
Obliczamy długości boków trójkąta:

$$|AC| = \sqrt{\left(0 - (-20)\right)^2 + (27 - 12)^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$|AB| = \sqrt{\left(7 - (-20)\right)^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Obliczamy obwód L trójkąta ABC:

$$L = |AB| + |BC| + |CA| = 9\sqrt{10} + 25 + 25 = 50 + 9\sqrt{10}$$

<u>Sposób 3.</u>
Niech y oznacza drugą współrzędną wierzchołka C, tj. $C = (0, y)$.
Obliczamy współrzędne środka M odcinka AB:

$$M = \left(\frac{-20 + 7}{2}, \frac{12 + 3}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{MC}$:

$$\overrightarrow{MA} = \left[-20 + \frac{13}{2}, 12 - \frac{15}{2}\right] = \left[-\frac{27}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{MC} = \left[0 + \frac{13}{2}, y - \frac{15}{2}\right] = \left[\frac{13}{2}, y - \frac{15}{2}\right]$$

Wektor $\overrightarrow{MA}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{MC}$, zatem

$$-\frac{27}{2} \cdot \frac{13}{2} + \frac{9}{2} \cdot \left(y - \frac{15}{2}\right) = 0$$

$$\frac{9}{2}y = \frac{486}{4}$$

$$y = 27$$

Zatem punkt C ma współrzędne $C = (0, 27)$.

Obliczamy długości boków trójkąta ABC:

$$|AC| = \sqrt{\left(0 - (-20)\right)^2 + (27 - 12)^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$|AB| = \sqrt{\left(7 - (-20)\right)^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$$

Obliczamy obwód L trójkąta ABC:

$$L = |AB| + |BC| + |CA| = 9\sqrt{10} + 25 + 25 = 50 + 9\sqrt{10}$$

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. ogólnych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
II. dodatkowych szczegółowych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – matura z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2021.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania,
   - przestawienia cyfr,
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie,
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych

sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.

11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe szczegółowe zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 29.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- stosuje poprawną metodę obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x - 14$, tzn. stosuje wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego i oblicza te pierwiastki, popełniając błędy o charakterze dyskalkulicznym

ALBO

- zdający w wyniku obliczeń otrzyma wyróżnik ujemny, ale konsekwentnie narysuje parabolę

ALBO

- Poprawnie rozwiąże nierówność $x^2 - 5x \leq 0$.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in [7, -2]$.

Uwaga:

1. Jeżeli zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału otwartego, to może otrzymać co najwyżej **1 pkt**.

Zadanie 30.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

przekształci nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ do postaci $\frac{a(b+c)}{b} < a + c$ lub $a < \frac{b(a+c)}{b+c}$.

Zadanie 31.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 32.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- popełnia błąd przy przekształceniu równania $\frac{3x+2}{3x-2}=4-x$ do postaci równania kwadratowego, lecz dalej stosuje poprawną metodę rozwiązania otrzymanego równania i konsekwentnie oblicza pierwiastki tego równania.

Zadanie 33.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zastosuje poprawną metodę obliczenia długości boku trójkąta ABC (stosuje wzór na pole trójkąta równobocznego)

ALBO

- zapisze, że $\frac{P_{ABC}}{P_{AKL}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- zastosuje poprawną metodę wyznaczenia długości boku trójkąta AKL, popełnia jeden błąd o charakterze dyskalkulicznym i konsekwentnie doprowadza rozwiązanie do końca.

Uwaga:
W ocenie rozwiązania zadania 33. (dla zdających z dyskalkulią) <u>nie stosuje się</u> uwagi nr 2 ze standardowych zasad oceniania.

Zadanie 34.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze jedynie liczbę 36 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

ALBO

- zapisze liczbę 12, o ile z zapisów wynika, że interpretuje tę liczbę jako liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A (np. jest to zilustrowane wypisaniem kilku zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i zdający nie zapisze zdarzeń elementarnych, które nie sprzyjają zdarzeniu A).

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- <u>poprawnie wypisze (lub zaznaczy)</u> wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, popełni błąd w ich zliczeniu i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{x}{36}$, gdzie x jest liczbą zliczonych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

Uwaga:
W ocenie rozwiązania zadania 34. (dla zdających z dyskalkulią) <u>nie stosuje się</u> uwagi nr 1 ze standardowych zasad oceniania.

Zadanie 35.

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- zastosuje poprawną metodę obliczenia długości boku AB trójkąta

ALBO
- zastosuje poprawną metodę obliczenia współczynnika kierunkowego równania prostej AB

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:
- zastosuje poprawną metodę wyznaczenia równania symetralnej odcinka AB

ALBO
- stosuje poprawne metody wyznaczenia wielkości w punktach 1)-4) pierwszego punktora standardowych zasad oceniania za 1 pkt oraz zastosuje poprawną metodę obliczenia długości boku AB trójkąta.